

Pendugaan Parameter

1 Pendahuluan

- Pendugaan Parameter Populasi dilakukan dengan menggunakan nilai Statistik Sampel

Misal :

1. \bar{x} digunakan sebagai penduga bagi μ
2. s digunakan sebagai penduga bagi σ
3. \bar{p} atau \hat{p} digunakan sebagai penduga bagi π atau p

Catatan : Beberapa pustaka menulis \bar{p} sebagai \hat{p} (p topi)

\bar{p} = proporsi "sukses" dalam Sampel acak (ingat konsep percobaan binomial?)

$1 - \bar{p} = \bar{q} =$ proporsi "gagal" dalam Sampel acak

- Pendugaan parameter diwujudkan dalam pembentukan selang kepercayaan, karena hampir tidak pernah ditemukan nilai statistik tepat sama dengan nilai parameter.

- Selang Kepercayaan = Konfidensi Interval = Confidence Interval

- ☺ Didekati dengan distribusi Normal (Distribusi z atau Distribusi t)
- ☺ Mempunyai 2 batas : batas atas (kanan) dan batas bawah (kiri)
- ☺ Derajat Kepercayaan = Tingkat Kepercayaan = Koefisien Kepercayaan = $1 - \alpha$
- ☺ α kemudian akan dibagi ke dua sisi
 $\alpha/2$ di atas batas atas dan $\alpha/2$ di bawah batas bawah

- Selang kepercayaan menurut Distribusi z dan Distribusi t

- ☺ Selang Kepercayaan dengan Distribusi z (Tabel hal 175)

Nilai α dan Selang kepercayaan yang lazim digunakan antara lain :

Selang kepercayaan 90 % \rightarrow Derajat Kepercayaan = $1 - \alpha = 90\%$

$\alpha = 10\% \rightarrow \alpha/2 = 5\% \rightarrow z_{5\%} = z_{0.05} = 1.645$

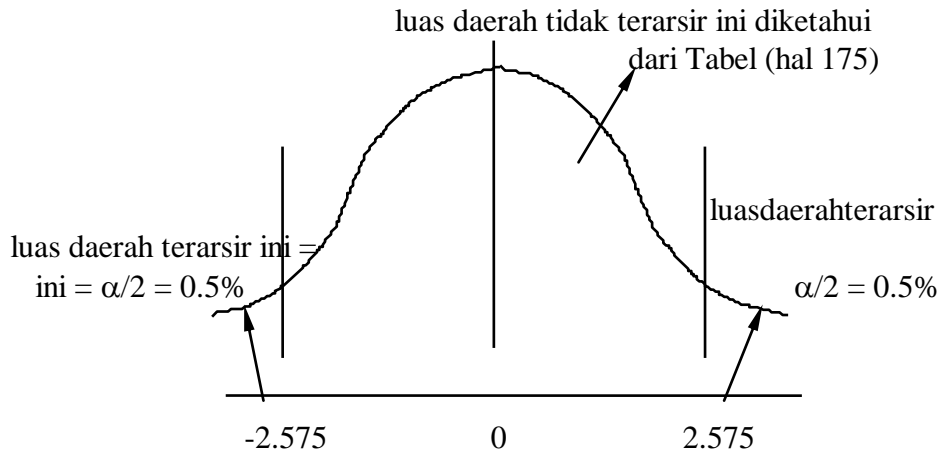
Selang kepercayaan 95 % \rightarrow Derajat Kepercayaan = $1 - \alpha = 95\%$

$\alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 2.5\% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$

Selang kepercayaan 99 % \rightarrow Derajat Kepercayaan = $1 - \alpha = 99\%$

$\alpha = 1\% \rightarrow \alpha/2 = 0.5\% \rightarrow z_{0.5\%} = z_{0.005} = 2.575$

Contoh Distribusi z untuk SK 99 %



☺ Selang Kepercayaan dengan Distribusi t (Tabel hal 177)

Nilai α (dan tentu saja $\alpha/2$) sudah diterakan dalam Tabel.

Perhatikan derajat bebas (db).

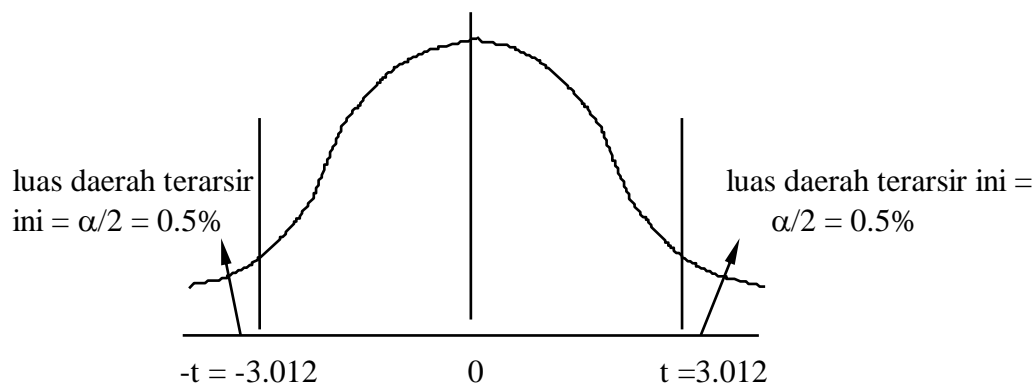
Nilai t tabel tergantung dari nilai derajat bebas (db) dan nilai $\alpha/2$ (Tabel hal 177)

Misal : Selang kepercayaan 99 %; db = 13 $\rightarrow 1 - \alpha = 99\%$

$\alpha = 1\% \rightarrow \alpha/2 = 0.5\%$

t tabel (db=13; $\alpha/2 = 0.5\%$) = 3.012

Contoh Distribusi t untuk SK 99 % ; db = 13



☛ Selang Kepercayaan yang baik?

Idealnya selang yang baik adalah *selang yang pendek* dengan *derajat kepercayaan yang tinggi*.

☛ Banyak Selang Kepercayaan yang dapat dibentuk dalam suatu populasi adalah Tidak terhingga, anda bebas menetapkan derajat kebebasan dan lebar selangnya.

Contoh 1 :

Di bawah ini terdapat 4 selang kepercayaan mengenai rata-rata umur mahasiswa. Semua selang dibuat untuk populasi yang sama, manakah yang paling baik?

- A. Selang kepercayaan 90 % rata-rata umur mahasiswa 18 - 25 tahun
- B. Selang kepercayaan 99 % rata-rata umur mahasiswa 18 - 27 tahun
- C. Selang Kepercayaan 90 % rata-rata umur mahasiswa 22 - 27 tahun
- D. Selang Kepercayaan 99 % rata-rata umur mahasiswa 22 - 25 tahun

Jawab : D, karena.....

• Bentuk Umum Selang Kepercayaan

$$\text{Batas Bawah} < (\text{Simbol}) \text{ Parameter} < \text{Batas Atas}$$

Untuk Sampel Berukuran Besar :

$$\text{Statistik} (z_{\alpha/2} \times \text{Standard Error Sampel}) < \text{Parameter} < \text{Statistik} + (z_{\alpha/2} \times \text{Standard Error Sampel})$$

Untuk Sampel Berukuran Kecil :

$$\text{Statistik} (t_{(db; \alpha/2)} \times \text{Standard Error Sampel}) < \text{Parameter} < \text{Statistik} + (t_{(db; \alpha/2)} \times \text{Standard Error Sampel})$$

2. Pendugaan Rata-rata

2.1. Pendugaan Rata-rata dari Sampel besar ($n \geq 30$)

- Nilai simpangan baku populasi (σ) diketahui
- Jika nilai simpangan baku populasi (σ) tidak diketahui \rightarrow gunakan simpangan baku Sampel (s)

Selang kepercayaan 1

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi μ adalah :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Jika σ tidak diketahui, dapat digunakan s

- Ukuran Sampel bagi pendugaan μ

Pada Derajat Kepercayaan $(1-\alpha)$ ukuran sampel yang error(selisih atau galat)nya tidak lebih dari suatu nilai E adalah

$$n = \left\lceil \left[\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right]^2 \right\rceil$$

n dibulatkan ke bilangan bulat terdekat yang paling besar (fungsi ceiling)
jika σ tidak diketahui, gunakan s

E : error \rightarrow selisih \bar{x} dengan μ

Contoh 2

Dari 36 mahasiswa tingkat II diketahui bahwa rata-rata IPK = 2.6 dengan simpangan baku = 0.3.

a. Buat selang kepercayaan 95 % untuk rata-rata IPKseluruh mahasiswa tingkat II?

Selang kepercayaan 95 % $\rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 2.5\% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$

$$\bar{x} = 2.6 \quad s = 0.3$$

$$\bar{x} - z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$2.6 - (1.96) \left(\frac{0.3}{\sqrt{36}} \right) < \mu < 2.6 + (1.96) \left(\frac{0.3}{\sqrt{36}} \right)$$

$$2.6 - 0.098 < \mu < 2.6 + 0.098$$

$$2.502 < \mu < 2.698$$

$$2.5 < \mu < 2.7$$

(catt : mengikuti nilai \bar{x} yang hanya mempunyai 1 desimal, nilai-nilai dalam selang dibulatkan satu desimal)

b. Berapa ukuran Sampel agar selisih rata-rata Sampel (\bar{x}) dengan rata-rata populasi (μ) pada selang kepercayaan 95 % tidak lebih dari 10 %?

$$E = 10 \% = 0.10$$

$$s = 0.3$$

Selang kepercayaan 95 % $\rightarrow \alpha = 5 \% \rightarrow \alpha/2 = 2.5 \% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$

$$n = \frac{z_{0.025} s}{E}^2 = \frac{(1.96)(0.3)^2}{0.10} = (5.88)^2 = 34.5744 \approx 35$$

2.2. Pendugaan Rata-rata dari Sampel kecil ($n < 30$)

dan nilai simpangan baku populasi (σ) tidak diketahui \rightarrow gunakan simpangan baku Sampel (s^2)

Selang Kepercayaan 2

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi μ adalah :

$$\bar{x} - t_{(db; \alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(db; \alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

db = derajat bebas = $n-1$

2.3. Pendugaan bagi Beda 2 Rata-rata dari Sampel-Sampel besar dan nilai ragam populasi (σ_1^2 dan σ_2^2) diketahui dan jika nilai ragam populasi (σ_1^2 dan σ_2^2) tidak diketahui → gunakan ragam Sampel (s_1^2 dan s_2^2)

Selang Kepercayaan 3

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ adalah

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < |\mu_1 - \mu_2| < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui → gunakan s_1^2 dan s_2^2

2.4 Pendugaan bagi Beda 2 Rata-rata dari Sampel-Sampel kecil dan nilai kedua ragam populasi tidak sama ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) dan tidak diketahui → gunakan ragam Sampel (s_1^2 dan s_2^2)

Selang Kepercayaan 4

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi $|\mu_1 - \mu_2|$ adalah

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{(db; \alpha/2)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < |\mu_1 - \mu_2| < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + t_{(db; \alpha/2)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\text{derajat bebas (db)} = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

db : dibulatkan ke bilangan bulat terdekat

ATAU db dapat didekati dengan $n_1 + n_2 - 2$

2.5 Pendugaan bagi Beda 2 Rata-rata dari Sampel-Sampel kecil dan nilai kedua ragam populasi sama ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) tidak diketahui →gunakan ragam Sampel gabungan (s_{gab}^2)

Selang Kepercayaan 5

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ adalah

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{(db; \alpha/2)} \times s_{gab} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < |\mu_1 - \mu_2| < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + t_{(db; \alpha/2)} s_{gab} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$s_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \text{ dan } s_{gab} = \sqrt{s_{gab}^2} \text{ dan derajat bebas} = n_1 + n_2 - 2$$

2.6. Pendugaan Proporsi dari Sampel besar

- Pengertian proporsi

π = proporsi populasi

\bar{p} = proporsi "sukses" dalam Sampel acak

$\bar{q} = 1 - \bar{p}$ = proporsi "gagal" dalam Sampel acak

Misal :

kelas "sukses" → "menyukai seafood" kelas "gagal" → "tidak menyukai seafood"
yang ditanyakan dalam soal → kelas "SUKSES"

Pendugaan Proporsi lebih lazim menggunakan Sampel besar, jadi lebih lazim menggunakan Distribusi z.

Selang Kepercayaan 6

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi p adalah :

$$\bar{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} < \pi < \bar{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}$$

ingat → $1 - \bar{p} = \bar{q}$

- Ukuran Sampel

Ukuran Sampel pada Selang Kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dengan galat (selisih atau Error) tidak akan melebihi suatu nilai E adalah :

$$n = \left\lceil \frac{z_{\alpha/2}^2 \bar{p}\bar{q}}{E^2} \right\rceil \quad n \text{ dibulatkan ke atas !}$$

n : ukuran sampel

E : error \rightarrow selisih \bar{p} dengan π

2.7 Pendugaan Beda 2 Proporsi dari Sampel-Sampel besar

Selang Kepercayaan-7

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi $|\pi_1 - \pi_2|$ adalah :

$$\left| \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \right| - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}} < |\pi_1 - \pi_2| < \left| \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \right| + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}$$

☸ selesai ☸