

Distribusi Sampling Sebaran Penarikan Contoh

I PENDAHULUAN

- Bidang Inferensia Statistik membahas generalisasi/penarikan kesimpulan dan prediksi/peramalan.
- Generalisasi dan prediksi tersebut melibatkan sampel/contoh, sangat jarang menyangkut populasi!, mengapa?
 1. Pekerjaan yang melibatkan populasi memerlukan waktu dan biaya yang banyak
 2. Pada beberapa populasi, anggota populasi akan rusak/habis setelah dilakukan pendataan
- Sampel yang baik → Sampel yang representatif
 Ukuran Sampel (Statistik) harus memberi gambaran yang tepat mengenai Ukuran Populasi (Parameter).
 (Masih ingat apa itu Statistik Sampel vs Parameter Populasi ?)
 contoh :

Ukuran	Parameter Populasi	Statistik Sampel
Nilai Tengah = rata-rata	μ	\bar{x}
Proporsi	π	\bar{p}
standar deviasi	σ	S
selisih 2 nilai tengah	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

- Bagaimana memperoleh sampel yang representatif ?
 Perhatikan :
 1. keacakan(randomness) sampel
 2. ukuran sampel
 3. teknik penarikan contoh (sampling) yang sesuai dengan kondisi populasi

Sampel Random = Contoh Acak → jika dan hanya jika semua anggota populasi memiliki peluang/kesempatan terpilih menjadi anggota contoh

- Beberapa Teknik Penarikan Contoh

1. Penarikan Contoh Acak Sederhana (Simple Random Sampling)

Gunakan : tabel random, undian!

2. Penarikan Contoh Sistematis (Systematic Sampling)

Tentukan terlebih dahulu interval untuk anggota populasi yang terpilih sebagai anggota sampel!

contoh : Ditentukan interval = 20

Anggota populasi ke-7 terpilih sebagai anggota ke-1 dalam sampel

Anggota populasi ke-27 menjadi anggota ke-2 dalam sampel

Anggota populasi ke-47 menjadi anggota ke-3 dalam sampel, dst

3. Penarikan Contoh Acak Berlapis (Stratified Random Sampling)

Populasi terlebih dahulu dibagi ke dalam kelas yang (cenderung) homogen.

Dalam Setiap Kelompok, ambil contoh acak!

Contoh : Dari 1000 orang mahasiswa/i GD akan diambil 200 orang sebagai sampel

Mahasiswa/i	Kelas 1 = 50 orang	Kelas 2 = 50 orang
	Kelas 3 = 50 orang	Kelas 4 = 50 orang

4. Penarikan Contoh Gerombol/Kelompok (Cluster Sampling)

Contoh yang diambil berupa kelompok dan bukan individu!

Contoh : Dari 5 000 karung beras, masing-masing berisi 100 kg akan diambil contoh sebanyak 1000 kg. Bagaimana caranya?

Lakukan pengacakan karungnya saja → ambil 10 karung (jadi tidak perlu seluruh isi ke-5 000 karung dituang, diacak baru diambil 1 000 kg)

5. Penarikan Contoh Area (Area Sampling)

Prinsipnya sama dengan Cluster Sampling.

Pengelompokkan ditentukan oleh lokasi geografis/administratif.

contoh : Pengambilan contoh di daerah JAWA BARAT, maka dapat dilakukan pengambilan contoh per Kotamadya.

Misalkan, Terpilih Kodya Bogor, Sukabumi, Cirebon

Random Sampling menjadi dasar penarikan contoh yang lain.

Selanjutnya, pembahasan akan menyangkut Random Sampling, OK!!!

- Menurut cara penarikannya, maka Contoh Acak Sederhana dibedakan menjadi :

1. Contoh acak dengan pemulihan → setelah didata, anggota sampel dikembalikan ke dalam populasi

2. Contoh acak tanpa pemulihan → setelah didata, anggota sampel disisihkan/tidak dikembalikan ke dalam populasi

- Berdasarkan ukuran sampel, sampel acak dibedakan menjadi:

1. Sampel Besar → jika ukuran sampel $(n) > 30$

2. Sampel Kecil → jika ukuran sampel $(n) \leq 30$

→ ada kondisi tertentu di mana distribusi sampling dan estimasi didekati dengan distribusi t (Sudah tahu cara membaca tabel-t? (hal 177)

***** akan dijelaskan pada subbab distribusi sampling nilai tengah pada contoh kecil *****

DISTRIBUSI SAMPLING

- Jumlah Sampel acak yang dapat ditarik dari suatu populasi → sangat banyak
Karenanya setiap statistik akan mempunyai variasi antar sampel.
Hal ini menjelaskan bahwa Statistik-statistik tersebut berada dalam suatu distribusi atau sebaran
- Distribusi Sampling = Sebaran Penarikan Contoh
= sebaran peluang suatu statistik sampel
- Statistik Sampel yang paling populer dipelajari adalah Nilai tengah (\bar{x})

II. DISTRIBUSI SAMPLING BAGI NILAI TENGAH

Beberapa notasi

n = ukuran sampel

N = ukuran populasi

\bar{x} = nilai tengah sampel

μ = nilai tengah populasi

s = standar deviasi sampel

σ = standar deviasi populasi

$\mu_{\bar{x}}$ = nilai tengah/rata-rata antar semua sampel

$\sigma_{\bar{x}}$ = standar deviasi antar semua sampel

= standard error

= galat baku

DALIL-2

BILA

Contoh } diambil TANPA PEMULIHAN
berukuran = n }

dari { Populasi : berukuran N
terdistribusi NORMAL
nilai tengah = μ ; standar deviasi = σ

MAKA

sebaran untuk nilai tengah akan mendekati distribusi normal dengan

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \text{dan} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{dan} \quad \text{nilai} \quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n}) \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ → faktor koreksi populasi sehingga

Perhatikan : jika perbandingan N dengan n relatif besar, artinya sampel diambil dari suatu populasi yang sangat besar,

maka faktor koreksi mendekati satu → $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \approx 1$

Hal ini mengantarkan kita pada dalil-3, yaitu DALIL LIMIT PUSAT = DALIL BATAS TENGAH (= THE CENTRAL LIMIT THEOREM)

DALIL LIMIT PUSAT

Dalil Limit Pusat berlaku untuk contoh yang diambil dari populasi besar, selama populasi berukuran besar, distribusi populasi tidak dipersoalkan!!!!

DALIL-3 DALIL LIMIT PUSAT

BILA

Contoh : } diambil berukuran = n
 }
 }

 { Populasi : berukuran N besar
dari { distribusi sembarang
 { nilai tengah = μ ; standar deviasi = σ

MAKA

sebaran untuk nilai tengah akan mendekati distribusi normal dengan

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \text{dan} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{dan} \quad \text{nilai} \quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Dalam pengerjaan soal distribusi sampling bagi nilai tengah perhatikan asumsi-asumsinya, sehingga anda dengan mudah dan tepat dapat menggunakan dalil-dalil tersebut!!!

Contoh 1:

PT AIRAQUA sebuah perusahaan air mineral menyatakan bahwa rata-rata isi segelas AIRAQUA adalah 250 ml dengan standar deviasi = 15 ml, dan data ini menyebar normal. Jika setiap hari diambil 100 gelas sebagai contoh acak dengan pemulihan, Hitunglah :

- a. berapa peluang rata-rata sampel akan berisi kurang dari 253 ml? Produksi rata-rata adalah 100 000 000 gelas/hari.
- b. jika sampel diperkecil menjadi 25 gelas, berapa standard error atau galat bakunya?

Jawab :

Selesaikan dengan DALIL-1 → karena pemulihan
Selesaikan dengan DALIL-3 → karena populasi berukuran sangat besar

a. Peluang ($\bar{x} < 253$)?

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 250; \quad \sigma = 15; \quad \bar{x} = 253; \quad n = 100$$
$$\text{standard error} = \text{galat baku} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1.5$$

$$Z = \frac{253 - 250}{1.5} = 2.0$$

$$\text{Peluang} (\bar{x} < 253) = \text{Peluang} (Z < 2.0) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

b. Standard error jika n menjadi 25?

$$n = 25$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.0$$

Contoh 2

Dari 500 mahasiswa STIE GD diketahui rata-rata memiliki tinggi badan 165 cm dengan standar deviasi 12 cm; di ambil 36 orang sebagai sampel, jika penarikan contoh dilakukan tanpa pemulihan dan diasumsikan data tinggi mahasiswa menyebar normal, hitunglah :

- peluang tinggi badan sampel lebih tinggi dari 170 cm?
- jika sampel diperbesar menjadi 64 orang , berapa galat baku atau standar errornya?

jawab :

Diselesaikan dengan Dalil ke-2 → tanpa pemulihan !!!

a. Peluang ($\bar{x} > 170$) = ?

$$\bar{x} = 170; \quad \sigma = 12; \quad n = 36$$

$$\text{faktor koreksi} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{500-36}{500-1}} = \sqrt{\frac{464}{499}} = \sqrt{0.929...} = 0.964...$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} * \text{faktor koreksi}$$

$$\text{standard error} = \sigma_x = \frac{12}{\sqrt{36}} * 0.964... = \frac{12}{6} * 0.964... = 2 * 0.964... = 1.928...$$

$$Z = \frac{170 - 165}{1.928...} = 2.592... \approx 2.59$$

$$\text{Peluang} (\bar{x} > 170) = \text{Peluang} (Z > 2.59) = 0.5 - 0.4952 = 0.0048$$

b. standard error jika n = 64 ?

$$n = 64$$

$$\text{faktor koreksi} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{500-64}{500-1}} = \sqrt{\frac{436}{499}} = \sqrt{0.873...} = 0.934...$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} * \text{faktor koreksi}$$

$$\sigma_x = \frac{12}{\sqrt{64}} * 0.934... = \frac{12}{8} * 0.934... = 1.5 * 0.934... = 1.402...$$

II.2. DISTRIBUSI SAMPLING NILAI TENGAH DARI CONTOH KECIL STANDAR DEVIASI POPULASI (σ) TIDAK DIKETAHUI

$\therefore \sigma$ DIDEKATI DENGAN S (STANDAR DEVIASI SAMPEL)

Sampel Kecil \rightarrow jika ukuran sampel (n) < 30
 \rightarrow distribusi sampling dan estimasi didekati
dengan distribusi T

Tabel Distribusi-t (karya Student alias W.S. Gosset)

Prinsip \rightarrow mendekati sebaran contoh kecil dengan sebaran normal

Dalam Distribusi-t terdapat derajat bebas = degree of freedom = $n-1$,
 n adalah ukuran sampel.

Juga perhatikan ada nilai $\alpha \rightarrow$ luas daerah kurva di kanan nilai t
atau
luas daerah kurva di kiri nilai $-t$

Nilai $\alpha \rightarrow 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$

Nilai α dibatasi, mengingat banyaknya kombinasi yang harus disusun!!!

.

Dalam banyak kasus, nilai α ditentukan terlebih dahulu.
Lalu bersama dengan nilai derajat bebas, nilai t dalam tabel ditentukan.
Nilai t dalam tabel akan menjadi batas selang, selanjutnya anda tinggal membandingkannya dengan nilai t hitung.
Nilai t hitung adalah nilai t yang dihitung dengan menggunakan rumus dalam dalil ke-4.

Bagaimana membaca Tabel Distribusi-t (hal 177)?

Misalkan untuk $n = 11 \rightarrow$ derajat bebas = 10 pada $\alpha = 0.025 \rightarrow$
 $t = 2.228$

$\alpha = 0.025 = 2.5 \%$ di kiri kurva di batasi oleh $t = -2.228$ dan 2.5% kanan kurva $t = 2.228$

Arti gambar t adalah : nilai t dari contoh berukuran 11,
berpeluang 95 % jatuh di selang $-2.228 < t < 2.228$
sedang 5 % lainnya jatuh di luar selang tersebut ($5 \% = 2\alpha$)

Catatan :

Anda sudah dapat membedakannya dengan Tabel Normal (Z)?

Perbedaan Tabel Normal (Z) Vs Tabel t adalah :

Tabel Z \rightarrow nilai Z secara implisit menentukan nilai α

Tabel t \rightarrow nilai α dan derajat bebas menentukan nilai-t

DALIL-4

BILA

Contoh berukuran KECIL } diambil

$n < 30$ }

nilai tengah = \bar{x} ; }

standar deviasi = s }

dari { Populasi : berukuran N
{ terdistribusi normal
{ nilai tengah = μ ;

MAKA

sebaran untuk nilai tengah akan mendekati distribusi t dengan

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ dan $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ SEHINGGA nilai $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$

pada derajat bebas = $n-1$ dan suatu nilai α

Perhatikan !!!!

Dalil di atas , menggunakan simpangan baku sampel (s) dan bukan simpangan baku populasi (σ)

σ diduga dari s!!!!

Contoh 3

Manajemen PT JURAM menyatakan bahwa 95 % rokok produksinya rata-rata mengandung nikotin 1.80 mg. Yayasan Konsumen, kemudian melakukan pengujian terhadap 9 batang rokok dan didapatkan rata-rata contoh tersebut mengandung 1.95 mg nikotin dengan simpangan baku = 0.50 mg. Berdasarkan asumsi bahwa kandungan nikotin rokok JURAM terdistribusi normal, apakah hasil penelitian Yayasan Konsumen mendukung pernyataan PT JURAM???

jawab:

95 % berada di dalam selang \rightarrow berarti 5 % berada di luar selang. $\rightarrow 5 \% = 2 \alpha \rightarrow \alpha = 2.5 \% = 0.025$

$n = 9 \rightarrow$ derajat bebas = 8

Nilai t tabel = $t(0.025;8) = 2.306 \rightarrow$ jadi : 95 % berada di antara $-2.306 < t < 2.306$

Nilai t hitung =?

$\mu = 1.80; n_1; s = 0.50$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$
$$t = \frac{1.95 - 1.80}{0.50/\sqrt{9}} = \frac{0.15}{0.1667} = 0.9$$

Nilai t hitung ada di dalam selang $-2.306 < t < 2.306 \rightarrow$ jadi hasil penelitian tersebut memang sesuai dengan pernyataan PT JURAM!!!

II.3. DISTRIBUSI SAMPLING BAGI BEDA DUA NILAI TENGAH

Beda atau Selisih 2 nilai tengah = $|\mu_1 - \mu_2| \rightarrow$ ambil nilai mutlaknya!

Beda atau Selisih 2 nilai tengah \rightarrow melibatkan 2 sampel.

Kedua sampel harus saling bebas \rightarrow diambil dari 2 populasi yang berbeda

DALIL-5

BILA

Dua (2) buah Contoh } diambil
berukuran n_1 dan n_2 }

{ Dua (2) Populasi : berukuran besar
dari { nilai tengah μ_1 dan μ_2
{ nilai standar deviasi = σ_1 dan σ_2

MAKA

sebaran untuk nilai tengah akan mendekati distribusi normal dengan

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{dan} \quad \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

dan nilai
$$Z = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - |\mu_1 - \mu_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

σ^2 = ragam populasi

Contoh 4.

Dalam suatu uji IQ yang melibatkan seluruh mahasiswa dan mahasiswi se Indonesia, didapatkan data bahwa rata-rata mahasiswa berIQ 155 dengan ragam = 119 sedangkan kelompok mahasiswi berIQ rata-rata = 158 dengan ragam = 181.

Jika diambil 100 orang mahasiswa dan 100 orang mahasiswi sebagai sampel. Berapa peluang terjadi beda rata-rata IQ kedua kelompok sampel tersebut akan lebih dari 7?

Jawab :

Populasi:

Parameter	Populasi 1 (mahasiswa)	Populasi 2 (mahasiswi)
Nilai tengah (μ)	155	158
Ragam(σ^2)	119	181

Beda Nilai Tengah = $[155-158] = 3$

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 3$$

Sampel:

Statistik	Sampel1(mahasiswa)	Sampel2(mahasiswi)
ukuran(n)	100	100

Beda Nilai tengah sampel = 7 $\rightarrow (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 7$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{7 - 3}{\sqrt{\frac{119}{100} + \frac{181}{100}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.309... \approx 2.31$$

Peluang $((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 7) = \text{Peluang } (Z > 2.31) = 0.5 - 0.4896 = 0.0104$

III. Kesimpulan

Pada semua Distribusi Sampling untuk segala jenis statistik berlaku :

1. Distribusi Contoh (Besar & Kecil) yang diambil dari populasi yang terdistribusi normal dan nilai μ dan σ diketahui
DIDEKATI DENGAN DISTRIBUSI NORMAL
2. Distribusi Contoh Kecil di mana \bar{x} dan s diketahui yang diambil dari populasi yang terdistribusi normal
DIDEKATI DENGAN DISTRIBUSI STUDENT (t)
3. a. Penarikan Contoh dengan Pemulihan pada populasi terbatas
ATAU
b. Penarikan Contoh dari Populasi berukuran besar
TIDAK MEMERLUKAN FAKTOR KOREKSI
4. Penarikan Contoh tanpa pemulihan pada populasi terbatas
MEMERLUKAN FAKTOR KOREKSI

A. Lengkapi kalimat di bawah ini (20 soal):

- ☺ Sampel Random adalah sampel yang diambil dari populasi, sedemikian rupa, sehingga setiap anggota dalam(1) memiliki(2) yang sama untuk terpilih menjadi anggota ruang sampel.
- ☺ Penarikan Contoh tanpa pemulihan terjadi jika setelah didata, anggota sampel akan(3)
- ☺ Pada penarikan Contoh gerombol (= Cluster sampling), anggota sampel yang terpilih berupa.....(4)
- ☺ Dari lebih dari sejuta orang pelanggan KRL Jabotabek akan diambil 1000 sebagai sampel. Contoh akan dipilih berdasarkan nomor Kartu Langgan. Pelanggan dengan nomor kartu kelipatan 34 akan menjadi sampel. Penarikan contoh seperti ini adalah penarikan contoh(5)
- ☺ Dari lebih dari sejuta orang pelanggan PLN Depok akan diambil 1000 sebagai sampel. Contoh akan dipilih berdasarkan kelompok (Industri dan Rumah tangga). Penarikan contoh seperti ini adalah penarikan contoh(6)
- ☺ Pada prinsipnya, penarikan contoh(7) sama dengan penarikan contoh gerombol; hanya saja gerombol atau kelompok yang terpilih, dibatasi oleh(8) atau.....(9)
- ☺ Standard Error sangat tergantung dari(10) dan(11)
- ☺ Semakin banyak anggota sampel, semakin.....(12) standard error.
- ☺ Sampel dengan anggota lebih dari 30 disebut, sampel.....(13);
- ☺ Jika sampel ditarik dari populasi yang terdistribusi normal, maka distribusi sampling dapat didekati dengan distribusi.....(14)
- ☺ Jika standar deviasi populasi tidak diketahui, maka standar deviasi sampel (s) kecil, dapat digunakan untuk mengetahui sebaran sampling dan didekati dengan sebaran.....(15). Sebaran ini merupakan hasil karya W.S. Gosset, nilai-nilainya tergantung dari(16) dan(17)
- ☺(18) merupakan koefisien yang digunakan dalam penghitungan standar error pada populasi terbatas; Semakin besar populasi, nilainya akan mendekati satu.
- ☺ Nilai standard error sampling bagi beda dua nilai tengah dari dua contoh bebas yang diambil dari dua populasi yang besar didapat dengan rumus(19); Sedangkan nilai tengah bagi beda dua nilai tengah didapat dengan rumus.....(20).

B. Selesaikan soal-soal berikut (5 Soal)!

21. Pemegang kartu kredit *MUTERCard*® rata-rata mengeluarkan US \$ 500/bulan dengan standar deviasi \$ 100. Jumlah pemegang kartu tersebut kira-kira 200 orang dan rata-rata pengeluaran bulanan pelanggan terdistribusi normal; Sampel diambil dengan pemulihan. Dengan menggunakan sampel sebesar $n = 25$, hitung probabilitas sampling akan memiliki rata-rata pengeluaran bulan lebih dari US \$ 525

22. Pemegang kartu kredit *MUTERCard*® rata-rata mengeluarkan US \$ 500/bulan dengan standar deviasi \$ 100. Jumlah pemegang kartu tersebut kira-kira 200 orang dan rata-rata pengeluaran bulanan pelanggan terdistribusi normal; Sampel diambil tanpa pemulihan. Dengan menggunakan sampel sebesar $n = 25$, hitung probabilitas sampling akan memiliki rata-rata pengeluaran bulan lebih dari US \$ 525

23. Pemegang kartu kredit *MUTERCard*® rata-rata mengeluarkan US \$ 500/bulan dengan standar deviasi \$ 100. Jumlah pemegang kartu tersebut tercatat sebanyak 200 juta orang; Dengan menggunakan sampel sebesar $n = 25$, hitung probabilitas sampling akan memiliki rata-rata pengeluaran bulan kurang dari US \$ 525.

24. Pihak manajemen *MUTERCard*® menyatakan bahwa 99 % pengeluaran bulanan rata-rata jatuh pada selang US \$500, mereka melakukan pengujian terhadap 25 sampel dan mendapatkan bahwa rata-rata pengeluaran bulanan sampel tersebut = US \$525 dengan standar deviasi = US \$100. Berdasarkan pengujian sampel, apakah pernyataan Manajemen itu valid? Buktikan jawaban saudara (tunjukkan nilai t hitung; bandingkan dengan t tabel)

25. Manajemen *MUTERCard*® mengeluarkan dua produk *MISTERCARD*® dan *MUSTERCARD*®, di bawah ini terdapat data sampel yang diambil dari pemegang kartu-kartu tersebut.

sampel	<i>MISTERCARD</i> ®	<i>MUSTERCARD</i> ®
rata-rata populasi	\$ 500	\$ 505
ragam populasi	13225	11000
ukuran sampel	115	100

Dengan mengasumsikan bahwa kedua populasi berukuran besar dan mempunyai distribusi normal, hitung peluang sampling perbedaan antara 2 nilai tengah sampel lebih dari US \$10.